1 (Sem–4) MAT 2

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0400204

(Complex Analysis)

Full Marks : 45

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following as directed : 1×5=5

   নিৰ্দেশনা মতে তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

   (i) Sketch the set $Im\,z > 1$.

   $Im\,z > 1$ সংহতিটো অংকন কৰা।

   (ii) Describe the domain of the function

   $$\frac{1}{z^2+1}.$$

   $\frac{1}{z^2+1}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

Contd.

(iii) Write the function $f(z)=z^3+z+1$ in the form $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

$f(z)=z^3+z+1$ ফলনটো

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ আকাৰত লিখা।

(iv) Show that

দেখুওৱা যে

$$\lim_{z\to\infty}\frac{4z^2}{(z-1)^2}=4.$$

(v) Define entire functions.

সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) ফলন সংজ্ঞায়িত কৰা।

2. Answer ***any five*** of the following questions : $2\times5=10$

তলৰ *যিকোনো পাঁচটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) What do you mean by the accumulation point of a set? Determine the accumulation point of the set $z_n=i^n\,(n=1,2,..)$.

এটা সংহতিৰ সীমাবিন্দু বুলিলে কি বুজায়?

$z_n=i^n\,(n=1,2,..)$ গোটটোৰ সীমাবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Show that if a function $f(z)$ is continuous and non-zero at a point z_0 then $f(z) \neq 0$ throughout some neighbourhood of that point.

দেখুওৱা যে যদি $f(z)$ ফলনটো z_0 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন আৰু অশূন্য হয় তেন্তে সেই বিন্দুৰ কোনোবা এটা চুবুৰীত $f(z) \neq 0$।

(iii) Show that the function $f(z) = z^2$ is entire.

দেখুওৱা যে $f(z) = z^2$ ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(iv) Using Cauchy-Riemann equations determine where $f'(z)$ exists, when $f(z) = 1/z$.

Cauchy-Riemann সমীকৰণ ব্যৱহাৰ কৰি $f(z) = 1/z$ হলে তা $f'(z)$ কত থাকে সেইটো নিৰ্ণয় কৰা।

(v) Find z such that $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

z বিচাৰি উলিওৱা যাতে $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ হয়।

(vi) Show that the function $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ is entire.

দেখুওৱা যে $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(vii) Show that $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ where $z=x+iy$.

দেখুওৱা যে $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ য'ত $z=x+iy$ ।

(viii) Evaluate the integral $\int_0^\infty e^{-zt}dt, (\operatorname{Re} z>0)$.

$\int_0^\infty e^{-zt}dt, (\operatorname{Re} z>0)$ অনুকলটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ix) Evaluate the contour integral $\int_C \frac{dz}{z}$ where C is the top half of the circle $|z|=1$ from $z=1$ to $z=-1$.

Contour অনুকল $\int_C \frac{dz}{z}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত C হৈছে $z=1$ ৰ পৰা $z=-1$ লৈকে বৃত্ত $|z|=1$ ৰ ওপৰৰ অৰ্ধেক।

e^{-zt}

(x) Show that

দেখুওৱা যে

$$\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}\,dz\right| \le \frac{6\pi}{7}.$$

3. Answer ***any four*** of the following questions: 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) Suppose that $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ where $z=x+iy$ and $z_0=x_0+iy_0, w_0=u_0+iv_0$. Then prove that $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ if

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \text{ and}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0.$$

ধৰি লোৱা যে $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ য'ত $z=x+iy$ আৰু $z_0=x_0+iy_0, w_0=u_0+iv_0$ । প্ৰমাণ কৰা যে $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ যদি

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \text{ আৰু}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0 \text{ ।}$$

(ii) Suppose $f(z)=\bar{z}$. Examine where $\frac{dw}{dz}$ exists.

ধৰি লোৱা যে $f(z)=\bar{z}$। $\frac{dw}{dz}$ কত আছে পৰীক্ষা কৰা।

(iii) Suppose that $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ and its conjugate $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ are analytic in a domain D. Then show that $f(z)$ must be constant throughout D.

ধৰি লোৱা যে $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ আৰু ইয়াৰ সংযুগ্মী $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ domain Dত বিশ্লেষণাত্মক হয়। দেখুওৱা যে $f(z)$,D ত ধ্ৰুৱক হয়।

(iv) Show that if $f'(z)=0$ everywhere in a domain D then $f(z)$ must be constant throughout D.

যদি এটা domain D ৰ সকলোতে $f'(z)=0$ হয়, দেখুওৱা যে $f(z)$,D ত ধ্ৰুৱক হয়।

(v) What do you mean by harmonic functions? Show that if a function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ is analytic in a domain D then its component functions u and v are harmonic in D.

Harmonic ফলন বুলিলে কি বুজায়? দেখুওৱা যে যদি এটা ফলন $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ এটা domain Dত বিশ্লেষণাত্মক হয়, তেন্তে ইয়াৰ উপাদান ফলন u আৰু v, Dত harmonic হয়।

(vi) Define complex exponential function and show that it is entire.

জটিল exponential ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু দেখুওৱা যে ই সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(vii) Show that

দেখুওৱা যে

$$(1+i)^i = exp\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)exp\left(i\frac{ln 2}{2}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

(viii) Let C denote the positively oriented boundary of the square whose sides lie along the lines $x=\pm 2$ and $y=\pm 2$. Applying the Cauchy's integral formula evaluate $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}dz$.

ধৰা হওক C য়ে বৰ্গটোৰ ধনাত্মকভাৱে অভিমুখী সীমা বুজাওক যাৰ কাষবোৰ $x = \pm 2$ আৰু $y = \pm 2$ ৰেখাত পৰি আছে। Cauchy's integral সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i / 2} dz$$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any one*** of the following questions: $10 \times 1 = 10$

তলৰ *যিকোনো এটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) Suppose that $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ and that $f'(z)$ exists at a point $z_0 = x_0 + iy_0$. Prove that the first order partial derivatives of u and v must exist at (x_0, y_0) and they must satisfy the Cauchy-Riemann equations there. Also show that $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ where partial derivatives are to be evaluated at (x_0, y_0).

ধৰি লোৱা যে $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ আৰু $f'(z)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ বিন্দুত সংজ্ঞাবদ্ধ হয়। প্ৰমাণ কৰা যে u আৰু v ৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ (x_0, y_0) ত থাকিব লাগিব আৰু তাত Cauchy-Riemann সমীকৰণ সন্তুষ্ট কৰিব লাগিব। লগতে

দেখুওৱা যে $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ য'ত আংশিক অৱকলজ সমূহৰ মান (x_0, y_0) ত উলিয়াব লাগে।

(ii) Show that if $w(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \le t \le b$ is a continuous function then

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \le \int_a^b |w(t)|\,dt.$$

Suppose C is a contour of length L and f is continuous of C. If M is non-negative constant such that $|f(z)| \le M$, $\forall z \in C$ at which $f(z)$ is defined the using the above result show that

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML.$$

যদি $w(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \le t \le b$ অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \le \int_a^b |w(t)|\,dt.$$

ধৰি লোৱা হ'ল C, L দৈৰ্ঘ্যৰ contour হয় আৰু f, C ত অবিচ্ছিন্ন হয়। যদি M অঋণাত্মক ধ্ৰুৱক হয় যাতে সকলো $\forall z \in C$ ৰ বাবে $|f(z)| \le M$ । উপৰৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰা দেখুওৱা যে

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML.$$

(iii) State and prove Liouville's theorem.

Liouville-ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(iv) Suppose that a function $f(z)$ is continuous in a domain D. Show that the following statements are equivalent:

(a) The integrals of $f(z)$ along contours lying entirely in D and extending from any fixed point z_1 to any fixed point z_2 all have the same value.

(b) The integrals of $f(z)$ around closed contours lying entirely in D all have value zero.

ধৰি লোৱা যে এটা ফলন $f(z)$ এটা domain D ত অবিচ্ছিন্ন হয়। দেখুওৱা যে নিম্নলিখিত বিবৃতিসমূহ সমতুল্য ঃ

(a) সম্পূৰ্ণৰূপে D ত থকা আৰু যিকোনো স্থিৰ বিন্দু z_1 ৰ পৰা যিকোনো স্থিৰ বিন্দু z_2 লৈ বিস্তৃত contour ত $f(z)$ ৰ সকলো অনুকলবোৰৰ মান একে।

(b) সম্পূৰ্ণৰূপে D ত থকা বন্ধ contour ত $f(z)$ ৰ সকলো অখণ্ডবোৰৰ মান শূন্য।